ダブルバスレフの共鳴周波数の計算

松原　郁哉

1．はじめに

スピーカーを裸で鳴らすと、振動紙の前面から出た音と背面から出た音が打ち消し合い、特に低域の出力が落ちてしまう。そこで、通常は箱や板などに取り付けて使用する。もっとも単純な方式は密閉箱などで背面から出た音を遮るものであるが、背面から出た音を積極的に利用する方式もある。バスレフ形というもその一つで、スピーカーを共鳴箱に取り付け、背面から出た音の位相を反転して放出させるものである。（このため（位相反転形ともよばれる）位相を反転することにより、前面からの音と同位相になり、むしろ強め合うようになる。箱の共鳴周波数近傍の音が大きく出ることになる。ダブルバスレフというのは共鳴箱を直列につないで、共鳴点を増やし、より低音まで再生できるようにしたものである。

バスレフ、あるいはダブルバスレフを用いてスピーカーシステムを作る場合、適切な周波数特性を得るためには箱の共鳴周波数が重要となる。ところが、バスレフの共鳴周波数の計算法はよく知られているが[1]、ダブルバスレフについては、かなり近似的なものしかない[2]。ここではまずバスレフの共鳴周波数の求め方を紹介し、それを拡張することで、ダブルバスレフの共鳴周波数の計算方法を導くことにする。また、この結果をもちいてダブルバスレフの適切な容積やダクトの長さについても考えてみる。

2．バスレフの共鳴周波数

バスレフの構造は、図１のように、空洞の容器にダクトと呼ばれる筒をつけたものになっている。これは、空洞内の空気がバネ、ダクト内の空気がおもりとなって振動するヘルムホルツ共鳴器[3]の一種である。つまり図２と等価となっている。

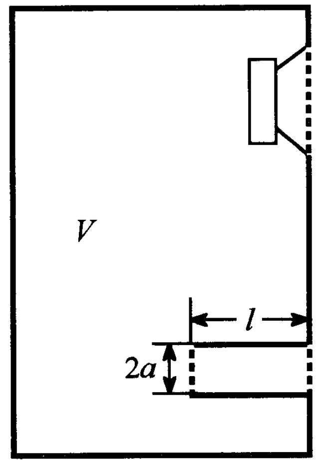


図 1

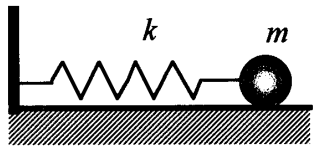


図 2

バネ定数を k とすると、おもりが x 移動したときにかかる力は$-kx$ となるので、おもりの質量を m とすると、運動方程式は、

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1)$$

となる。ここで $x=Ae^{i\omega t}$（A、ωは定数）とおけば、

$$-k = -m\omega^2$$
$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

となるので、これから周波数は、

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3)$$

と求められる。上式からわかるように、振幅 A は周波数に影響しない。

バスレフの共鳴周波数を求めるにはおもりとなる空気の質量 m_D と空洞のバネ定数 k_C を求めればよいことになる。

おもりとなるのは主としてダクト内の空気であるが、おもりとしてふるまう空気の長さはダクトよりも長くなっている。この差の補正をを開口端補正とよぶ。ダクトが円筒形の場合、開口端補正 Δd はダクトの半径に比例しているが、その比例定数は端の形状に依存している。たとえば半径 a の円筒の場合、無限大のフランジ付きでは、

$$\Delta d \fallingdotseq 0.85a \qquad (4)$$

フランジなしでは、

$$\Delta d \fallingdotseq 0.6a \qquad (5)$$

である。通常のバスレフのダクトは片側がフランジ付き、反対側がフランジなしになっている。したがって、この場合のおもりとなる空気の質量 m_D は、空気の密度を ρ、ダクトの半径を a、長さを l とすると、

$$m_D = \rho \pi a^2 (l + 1.45a) \qquad (6)$$

となる。

つぎに空洞のバネ定数を求めることにする。ダクト内の空気が外側へ x 移動すると、空洞内にあった空気の体積が $\Delta V = \pi a^2 x$ だけ増加する。体積の変化量が微小の場合、最初の空洞内空気の体積を V、圧力を p、断熱圧縮率を κ とすると、圧力の減少量 Δp は、

$$\Delta p = \frac{\Delta V}{V\kappa} = \frac{\pi a^2}{V\kappa} x \qquad (7)$$

で与えられる。なお、ここでは比較的速い運動をあつかうので、断熱変化と考えてよい。おもりとなるダクト内の空気にかかる力は $-\Delta p \pi a^2$ となるので、バネ定数 k_C は、

$$k_C = \frac{\pi^2 a^4}{V\kappa} \qquad (8)$$

で与えられる。

$m_D = \rho \pi a^2 (l + 1.45a)$ （6）式と（8）式を（3）式に代入すれば、つぎのようにバスレフの共鳴周波数が求められる。

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi a^2}{V(l + 1.45a)\rho\kappa}} \qquad (9)$$

20℃、1 気圧の空気では、$\rho = 1.205\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$、$\kappa = 7.04 \times 10^{-6}\,\mathrm{Pa^{-1}}$ となるので、例えば、$V = 10$ L、$l = 20$ cm、$a = 3$ cm とすると、$f = 59$ Hz となる。

3．ダブルバスレフの共鳴周波数

ダブルバスレフの構造は図 3 のようにヘルムホルツ共鳴器を 2 つ直列につないだものになっている。バネとおもりに置き換えると図 4 のようになるので、ダブルバスレフの共鳴の様子を知るために、まずこのような系の振動を考えることにする。この結果をそのままダブルバスレフに当てはめられる場合もあるが、2 つのダクトの径が異なるときは、ダクト内の空気が同じ距離変位しても箱の中の圧力変化が同じではなくなり、単純にバネに置き換えて考えることはできなくなる。そこで、一般的な場合を取り扱うために、ダクト内の空気の運動と空洞の圧力変化の関係からも、振動周波数を求めることにする。

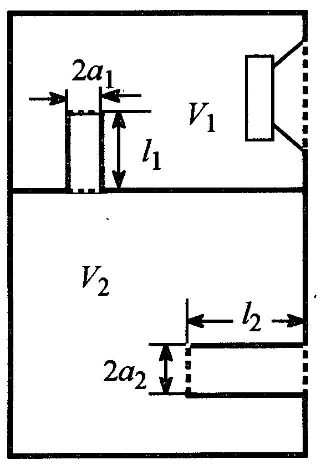


図 3

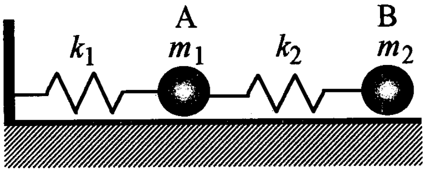


図 4

○バネとおもりの連性振動

簡単のため、２つのバネ、２つのおもりは等しいものとする。つまり図４において、$k_1=k_2=k$、$m_1=m_2=m$ とする。また、定常状態、すなわちおもり A と B が一定の振幅で単振動している状態を求めるので、おもり A の変位を x、おもり B の変位を bx とおく。つまり、おもり A と B の振動の周波数は同一で、振幅の比が b となっている。

おもり A,B の運動方程式はつぎのように与えられる。

$$
\begin{aligned}
-kx + k(bx - x) &= m\ddot{x} \\
-k(bx - x) &= mb\,\ddot{x}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

ここでおもり A の振幅は任意であるので、$x=e^{t\omega i}$

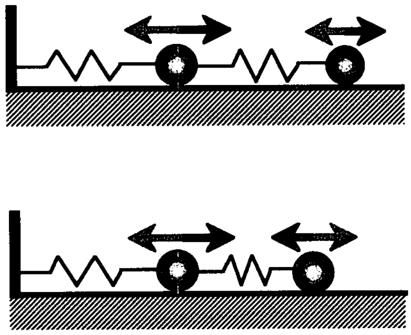
とおくと、

$$
\begin{aligned}
-2k + bk &= -m\omega^2 \\
-bk + k &= -mb\omega^2
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

となるので、これより、つぎの２つの解が得られる。

$$
\begin{cases}
b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\
\omega = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}}
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\
\omega = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{k}{m}}
\end{cases}
\qquad (12)
$$

解が２つあるということは固有振動のモードが２つあり、共鳴する周波数も２つあるということになる。上の解は $b>0$ なので図 5(i)に示したように２つのおもりが同位相で振動するモードで、下の解は $b<0$ なので(ii)のような逆位相のモードである。周波数は同位相の方が小さく、逆位相の方が大きい。バネ定数 k のバネ１つに質量 m のおもり１つをつけたときの周波数と比べると、それぞれ 0.62 倍、1.6 倍となっている。２つのダクトの径が等しいときは、ダブルバスレスでも、バスレフで用いた(8)式のようにバネ定数をおくことができるので、例えば、２つの箱の容積を 10 L、ダクトの長さを l=20 cm、半径を a=3 cm とすると、共鳴周波数は 36 Hz および 95 Hz と求められる。



（ i ） $b>0$

（ ii ） $b<0$

図 5

○空洞とダクトの連性振動

２つのダクトの径が異なる場合も含めてあつかうため、バネではなく直接空洞の圧力変化を考える。空洞１、２の容積を V_1、V_2、ダクト１、２の半径を a_1、a_2、変位を x、bx とすると、空洞１，２内の空気の体積変化 ΔV_1 および ΔV_2 は、

$$
\begin{aligned}
\Delta V_1 &= -\pi a_1^2 x \\
\Delta V_2 &= \pi a_1^2 x - \pi a_2^2 bx
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

となるので、圧力変化は

$$\Delta p_1 = -\frac{\pi a_1^2}{V_1 \kappa} x$$
$$\Delta p_2 = \frac{\pi a_1^2 - \pi a_2^2 b}{V_2 \kappa} x \qquad (14)$$

で与えられる。ダクト内の空気にかかる力は圧力とダクトの断面積の積になるので、運動方程式は、

$$-AS_1^2 x - B(S_1 - S_2 b)S_2 x = m_1 \ddot{x}$$
$$B(S_1 - S_2 b)S_2 x = m_2 b \ddot{x} \qquad (15)$$

となる。ただし、$A = \dfrac{1}{V_1 \kappa}$ 、$B = \dfrac{1}{V_2 \kappa}$ 、

$m_1 = \rho\pi a_1^2(l_1 + 1.45a_1)$、 $m_2 = \rho\pi a_2^2(l_2 + 1.45a_2)$

である。(15) 式で $x = e^{i\omega t}$ とおくと、

$$\begin{cases} AS_1^2 + BS_1S_2 - BbS_2^2 = m_1\omega^2 \\ -BS_1S_2 + BbS_2^2 = m_2 b\omega^2 \end{cases} \qquad (16)$$

が得られる。これより、

$$b = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{AS_1^2 + BS_1S_2 - BS_2^2 b}{m_1}} \qquad (17)$$

と求められる。ただし、

$$\alpha = Bm_2S_2^2$$
$$\beta = Bm_1S_2^2 - Am_2S_1^2 - Bm_2S_1S_2 \qquad (18)$$
$$\gamma = -Bm_1S_1S_2$$

である。例えば $V_1 = V_2 = 10$ L、$l_1 = l_2 = 20$ cm、$a_1 = 2$ cm、$a_2 = 3$ cm とすると、共鳴周波数は 27 Hz および 90 Hz と求められる。2 つのダクト内の空気の振動は、27 Hz のとき同位相、90 Hz のとき逆位相となる。

4. 考察

前節の結果をもちいて、パラメータの変化でダブルバスレフの共鳴がどのような変化をするかをみることにする。

まず、2つの箱の容積比を変えたときの共鳴の変化を調べる。V_1 を 1 L から 19 L まで変化させたときの共鳴振幅の比 b と共鳴周波数 f を示したのが、図 6 である。このとき容積の合計は 20 L で一定としたので、V_2 は 19 L から 1 L へと変化している。f_1、b_1 は同位相で振動しているときの周波数および振幅比、f_2、b_2 は逆位相の時の周波数および振幅比である。また、ダクトは2本とも長さ 10 cm、半径 2 cm で一定とした。

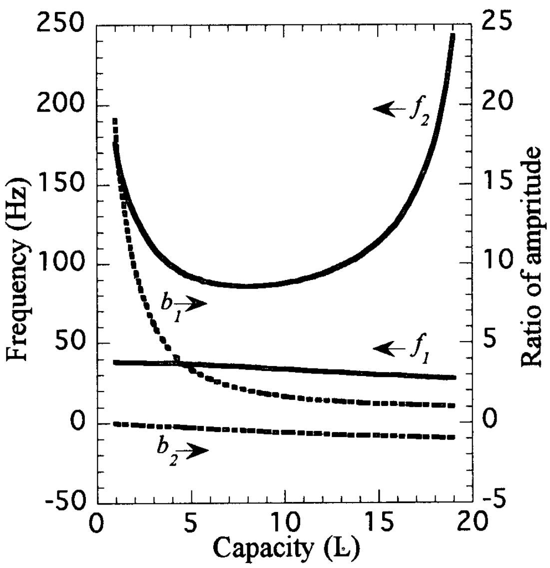


図 6

図 6 から分かるように、容積比を変えても同位相で振動するときの周波数 f_1 はあまり変化しないが、逆位相のときの周波数 f_2 は大きく変化する。低音域の特性をフラットにするためには、通常は f_1 と f_2 はあまり違わない方が良いので、V_2 は V_1 の 1〜1.5 倍程度にするのが適当と考えられる。

つぎに共鳴に対するダクトの影響を調べる。第1ダクトの長さを変化させたときの共鳴振幅の比と共鳴周波数を示したのが、図 7 である。ここでは $V_1 = V_2 = 10$ L、$a_1 = a_2 = 2$ cm、$l_2 = 10$ cm とし、l_1 を 1 cm から 20 cm まで変えた。

l_1 を変化させた場合も容積比を変化させたと

きと同様に、f_1 はそれほど変わらないが、f_2 は l_1 が 5 cm 以下だと f_1 の 3 倍以上になってしまう。また、l_1 が大きくなると b_1/b_2 の絶対値が減少するので、相対的に低音側の共鳴出力が低下し、やはり不適当と考えられる。この場合のように容積とダクト半径が等しいときは、ダクトの長さも同程度にするのが適当と思われる。

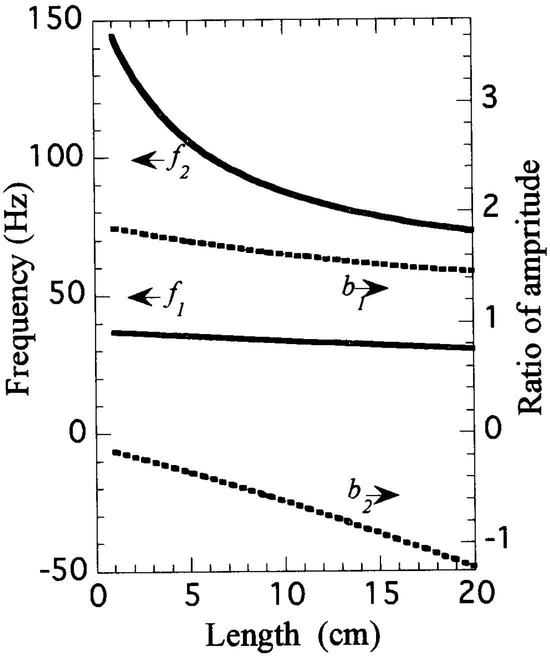


図 7

5. まとめ

ダブルバスレフの共鳴周波数を解析的に求めることができた。またこの結果が箱の容積やダクトの長さを設計するのに有用であることを示した。音響的に適切な共鳴箱を設計するには、もちろん共鳴周波数や振幅比だけでは不十分であるが、1つの重要な指針になるものと思われる。

参考文献

1. 佐伯多門監修「新版　スピーカ＆エンンクロージャー百科」誠文堂新光社 (1999) p.119
2. ラジオ技術別冊「スピーカ・システム製作集」pp.50-54
3. N. H. Fletcher, T. H. Rossing. "The Physics of Musical Instruments 2nd ed." Springer (1998) pp.13-14